پژوهش‌های علم و دین، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
سال اول، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۸۹، صص ۲۵- ۴۴

تأثیر تمدن اسلامی در شکوفایی ریاضیات کاربردی؛ محاسبهٔ فاصلهٔ بغداد ـ مکه به‌وسیله ابوالوفای بوزجانی

جعفر آقایانی چاوشی*

چکیده

ابوالوفای بوزجانی، ریاضیدان و منجم برجسته ایرانی در قرن چهارم هجری ضمن رسالهٔ مختصری که نسخهٔ خطی آن تاکنون بر جای مانده است، فاصلهٔ بغداد ـ مکه معظمه را با روشی کاملاً ابتکاری تعیین کرده است. او این روش را به‌طور کلی برای تعیین فاصلهٔ همه شهرها با معلوم بودن طول و عرض جغرافیایی آن‌ها تعمیم داده است.

در این مقاله پس از مروری به عصر بوزجانی ـ یعنی عصر زرین تمدن اسلامی که ریاضیات کاربردی را متداول کرد ـ روش وی را با استفاده از علائم جدید ریاضی مورد تحلیل قرار داده، آنگاه نتیجه حاصل از آن را با نتیجه یکی از روش‌های جدید در این زمینه مورد مقایسه قرار می‌دهیم تا دقّت این ریاضیدان بزرگ را در محاسباتش بهتر نمایان کنیم.

کلیدواژه‌ها: ابوالوفای بوزجانی، فاصلهٔ شهری، فتوگرامتری، مثلثات کروی، ریاضیات کاربردی، تمدن اسلامی

---

* عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات

تاریخ دریافت:۱۳۸۹/۸/۲۲، تاریخ پذیرش: ۸۹/۹/۳

مقدمه

مورخین علم، قرن چهارم هجری را به حق عصر زرّین تمدن اسلامی نامیده‌اند؛ زیرا در این دوره که مصادف با حکومت آل‌بویه بر عراق و بخش وسیعی از ایران آن روز بود، علم و فلسفه رونق فراوان داشت. در علوم عقلی نیز ریاضیات و نجوم پیشرفت قابل توجهی کرده بود. عضدالدوله معروف‌ترین پادشاه آل‌بویه اصرار داشت که از این علوم به‌ویژه برای بهبود زندگی روزمره استفاده شود. به همین جهت است که ریاضیدان معاصر وی ابوالوفای بوزجانی، دو کتاب مهم یکی در حساب عملی و دیگری در هندسه عملی تدوین کرد. او همچنین رسائل و مقالات دیگری را در زمینهٔ ریاضیات کاربردی به رشتهٔ تحریر در آورد که یکی از آن‌ها رساله مختصری تحت عنوان *فی معرفت الابعاد بین المساکن*، است. وی در این رساله با دو روشِ متفاوت فاصلهٔ شهر بغداد را تا مکّهٔ معظّمه تعیین کرده و سپس این روش را برای تعیین فواصل سایر شهرها تعمیم داده است.

این رساله نیز همچون آثار دیگر بوزجانی، از وسعت دانش و دقّت محاسبات این دانشمند بزرگ حکایت می‌کند. رسالهٔ بوزجانی، از طریق یک مجموعه از دست نوشته های نجومی به‌دست ما رسیده است.

محرّر این مجموعه، که یکی از اعضای فرقهٔ اسماعیلیّه بوده است، در اوایل قرن ششم هجری قمری مقالاتی را در زمینه‌های نجوم، تقویم و احکامِ نجوم از علمای مختلف گرد آورده و به همراه نامِ آنان در مجموعهٔ خود، که آن را *دستورالمُنجّمین* نامیده درج نموده است (Zimmermann, 1976).

از *دستورالمُنجّمین*، یک نسخهٔ خطی (به‌شمارهٔ B.N.Ar. ۵۹۶۸) در کتابخانهٔ ملّی پاریس موجود است. استاد کمدی رسالهٔ ابوالوفا را دربارهٔ تعیین فاصلهٔ بغداد تا مکّهٔ معظّمه ـ طی مقاله‌ای به زبان انگلیسی مورد تحلیل قرار داده و این تحلیل را در ۱۹۸۴م. منتشر کرده است (Kemmedy, 1984).

در این مقاله با نگاهی اجمالی به تمدن اسلامی در قرن چهارم هجری، نقش این

تمدن را در گسترش علـوم عقلـی همچـون ریاضـیات و نجـوم و بـه‌ویـژه ریاضـیات کاربردی گوشزد کرده و سپس با استفاده از مقاله استاد کندی روش بوزجانی را بـرای تعیین فاصله بغداد و مکه معظمه شرح می‌دهیم.

نگاهی به عصر زرین تمدن اسلامی

قـرن چهـارم هجـری را دو تـن از خاورشناسـان: آدام مِـز (Mez, 1922) و کرامـر (Kramer, 1993) عصر رُنسانس اسلامی نامیده‌اند؛ زیرا از جهات مختلفی شباهت بـه دو رنسانس اروپایی دارد. در این دوره که مذهب شیعه، مذهب غالبِ جهان اسلام بود، خاندان ایرانی بُویه نیز برعراق و بخش وسیعی از ایران آن روز حکومـت مـی‌کـرد. در واقع در سال ۳۳۴ هجری قمری، در زمانی که عباسیان دچار جنگ‌هـای داخلـی شـده بودند، احمد سردار دیلمی به همراه سربازانش پس از فتح تدریجی نیمـی از ایـران آن زمان بدون هیچ‌گونه مقاومتی وارد بغداد گردید و خلیفه مقتـدر عباسـی را از خلافـت برکنار نمود و خود را حاکم بلامنازع قلمرو وسیعی از جهان اسلامی نمود.

قدرت آل‌بویه در زمان عضدالدوله یعنی در سال ۳۵۱ هجری قمـری بـه اوج خـود رسید. در این دوران تقریباً دو سوم ایران و همهٔ بین‌النهـرین (عـراق) زیـر سـلطهٔ ایـن پادشاه آل‌بویه بود.

این امیر شیعه مذهب که عنوان ایرانی شاهنشاه را برای خـود برگزیـده بـود، بـرای جلوگیری از جنگ‌های شیعه و سنی، خلیفه عباسی را در مقام مذهبی خود ابقـا کـرد؛ ولی تمام نیروهای سیاسی را از دست او گرفت و او را بسان بازیچه‌ای در دست خود قرار داد و با این تدبیر سالیان دراز بر مسلمانان شیعه و سنی حکومت کرد.

عضدالدوله به گفته ابوسلیمان منطقی سجستانی، یک پادشاه کامـل بـود؛ زیـرا «بـه کوچک و بزرگ به دیده احترام می‌نگریست، مخصوصاً در مسـائل حکـومتی بصـیر و زبردست بود. او پادشاهی عادل و عمیقاً مؤمن به اسلام و در امور دولتی راسـت‌گـو و صادق و در اجرای قانون قاطع بود» (Ben Yakhlef, 1994: 106). پس از تأمین امنیت

در قلمرو حکومتی خود، عضدالدوله با تغییر واحد پولی به زندگی اقتصادی کشور سر و سامان بخشید؛ و همین امر باعث دادوستد و تجارت در شهرهای بزرگ و مخصوصاً بغداد شد.

هر چند که ثروت این شهرها به مزارع و مراتع کشاورزی که به طرز پیشرفته‌ای توسط چشمه‌ها و قنات‌ها آبیاری می‌شدند، وابستگی داشت؛ امّا تجارت داخلی و خارجی، سرمایه اصلی شهرها را تشکیل می‌داد.

این اقتصاد پویا زمینه خوبی را برای احداث بناهای مهم فراهم کرد؛ به همین دلیل است که عضدالدوله به ساختن پل‌ها، سدها، مساجد و بیمارستان‌ها اقدام نمود. قصر زیبای او در شیراز با جزئیات تمام توسط مقدسی تشریح گردیده است. او همچنین در اطراف شیراز سدی بر روی رودخانه کُر احداث کرد که به افتخار او آن را «بند امیر» نامیده‌اند. این سد با عظمت، نموداری از پیشرفت، علم و فن‌آوری در این عصر می‌باشد. وضعیت فرهنگی به اندازهٔ وضعیت سیاسی درخشان بود، در این باره نیز نقش عضدالدوله بسیار چشمگیر بود. تأسیس مدارس عالی و مخصوصاً تشکیل حلقه های علمی و فلسفی که در آن فلاسفه، دانشمندان و ادبا دربارهٔ مسائل دینی و فلسفی و علمی به مباحثه می‌نشستند، از کارهای مهم عضدالدوله بود.

عضدالدوله همه دانشمندان، فلاسفه و علمای دین و اخلاق را در کارهایشان تشویق و ترغیب می‌کرد و با آنکه مشوق نگارش علم و ادب به زبان عربی بود، ولی نسبت به احیاء فرهنگ ایرانی علاقهٔ فراوان نشان می‌داد. به همین جهت بود که دانشمندان و فلاسفه زیادی همچون ابوسلیمان منطقی سجستانی، ابوسهل کوهی، ابوالوفای بوزجانی و غیره زادگاه‌های خود را ترک کرده و به بغداد، یعنی یکی از مراکز مهم علمی جهان اسلام که در این زمان صورت یک شهر ایرانی به خود گرفته بود، آمده بودند.

عضدالدوله اصرار داشت تا علوم سیاسی و اخلاقی به فن کشورداری منجر شود تا او بتواند نه تنها از نصایح متخصصان فن بهره ببرد، بلکه مردانی را که شایستگی

مشاورت دارند از میان این بحث کنندگان انتخاب نماید. نکته‌ای که شایان ذکر است، این است که علوم طبیعی و ریاضی نه برای ارضای حس کنجکاوی، بلکه به خاطر پیشرفت و بهبود وضع جامعه آموخته می‌شد. علاقه به تحقیق و علم‌دوستی در این دوره را از مقدمهٔ کتاب‌های دانشمندان این زمان می‌توان به خوبی استنباط کرد. مثلاً ابوبکر کرجی یکی از ریاضیدانان بزرگ ایران که در همین زمان زندگی می‌کرد، در مقدمهٔ کتابی که دربارهٔ استخراج آب‌های پنهانی نوشته است، چنین می‌گوید: «چون در سرزمین عراق وارد شدم و مردم آن دیار را از کوچک و بزرگ دوستار دانش دیدم، دریافتم که دانش و اهل دانش را بزرگ و محترم می‌شمارند، در مدتی که در آنجا بودم به تصنیفی در حساب و هندسه پرداختم»(کرجی، ۱۳۴۵ : ۱).

پس از مرگ عضدالدوله، پسرش بهاءالدوله همان سیاست تسامح و مدارای پدرش را در پیش گرفت.[۱]

بغداد در این زمان به یک مرکز علمی بزرگ تبدیل گردیده بود و دانشمندانی که در آن به تحقیق می‌پرداختند، در بیشتر دانش‌ها و تجربیات علمی، خود را از قید استادان یونانی خود رها کردند و کم‌کم به تدوین علومی پرداختند که کاملاً بی‌سابقه بود. از آن جمله است «علم مثلثات» و «هندسه عملی». به عبارت دیگر در این زمان است که ابوالوفای بوزجانی کتاب ارزشمند خود یعنی *اعمال هندسی*، را تألیف می‌کند و ابوریحان بیرونی کتاب *قانون مسعودی* خود را در علم نجوم به رشتهٔ تحریر در می‌آورد و کوهی و دیگر دانشمندان در پیشرفت ریاضیات و نجوم کارهای ارزنده‌ای انجام می‌دهند.

شکوفایی ریاضیات کاربردی و حل مُعضل فاصلهٔ شهری

محمد بن موسی خوارزمی مبتکر علم جبر، در قرن سوّم هجری برای نخستین بار این علم را در مسائل مربوط به ارث در فقه اسلامی به‌کار گرفت و بدین ترتیب نه تنها یکی از معضلات جامعه را حل کرد، بلکه ریاضیات را وارد زندگی روزمره نمود. این

گونه رویکرد به ریاضیات در قرن چهارم و به‌ویژه در قلمرو آل‌بویه به اوج شکوفایی خود رسید. ریاضیدانان برجسته‌ای در این دوره کوشیدند تا با تألیف کتب و یا نگارش رسائلی معماران، صنعتگران، بازرگانان و دیگر اصناف جامعه را در کارهای خود به نحو احسن یاری دهند.

در این زمان بغداد ـ پایتخت آل‌بویه ـ به «ابر شهری» تبدیل شده بود که در آن سیاسیون، تجّار، صنعتگران و خلاصه عالمان دین و فلاسفه علی‌الدوام در تردّد و رفت وآمد بودند.

از طرف دیگر مکّه معظمه نیز پایگاه وحی و قبله مسلمانان بود. مسلمانان برای ادای فریضهٔ حج هر ساله از شهرهای خود به این مکان مقدس سفر می‌کردند. بازرگانان نیز با بهره‌گیری از این موقعیت استثنایی مکه، برای درآمدهای سرشار، اجناس خود را طی سفرهای مخاطره‌انگیز به این شهر می‌رساندند. این رفت و آمدها، برای پر ثمر شدن امکانات خاص خود را می‌طلبید، که مهم‌ترین آن همانا آگاهی از طول سفر بود. باید فاصلهٔ شهرها را از مکه دانست تا برحسب این آگاهی غذا و وسایل لازم در این سفر را تدارک دید.

بنابراین دانستن فاصلهٔ شهرها و به‌ویژه فاصله بغداد تا مکّه خواست همهٔ مردم بود که به‌صورت معضلی در آن زمان برای اقشار مختلف تبلور یافته بود. محاسبهٔ فاصلهٔ این دو شهر به‌وسیلهٔ ابوالوفا هم در واقع پاسخ به این نیاز مردمی بود.

در این مقاله پس از توضیح تعاریف و اصطلاحات نجومی به تشریح روش‌های ابوالوفا برای تعیین فاصلهٔ بغداد ـ مکه می‌پردازیم.

تعاریف و اصطلاحات نجومی

امروزه مهندسین راه و نقشه‌برداری با استفاده از تکنولوژی جدید و یا محاسبات دقیق ریاضی به آسانی فاصلهٔ دو نقطه از کرهٔ زمین را تعیین می‌کنند؛ حال آن که چنین تسهیلاتی در زمان‌های دور وجود نداشت.

در عهد باستان و نیز در قرون وسطی فاصلهٔ بین دو شهر را اغلب براساس حرکت یک کاروان شتر اندازه‌گیری می‌کردند. از باب مثال می‌گفتند هرگاه کاروانی با سرعت روزانه ۱۷ کیلومتر راه بپیماید پس از ۵۰ روز می‌تواند از اسکندریه به شهر آسوان برسد.

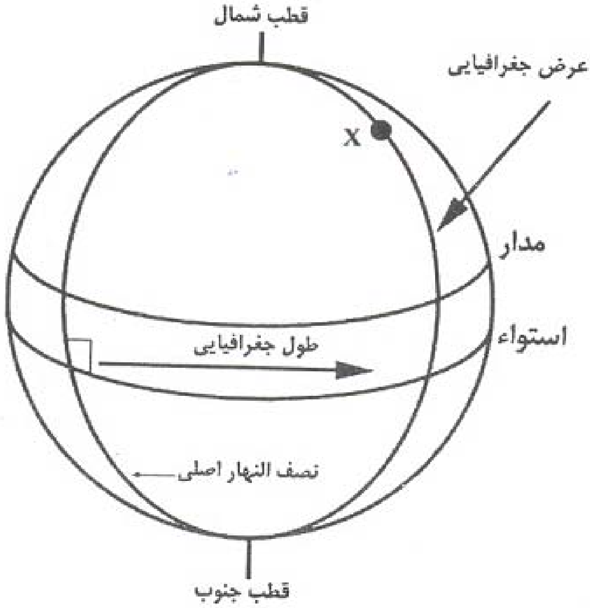
دانشمندان یونان باستان با توسّل به ریاضیات و نجوم راه پیشرفت در این زمینه را هموار کردند. از جمله کسانی که گام مهمی در این باره برداشت ـ دانشمند بزرگ یونانی ـ اراتستن (Eratosthenes) بود. او که مانند فلاسفه و دانشمندان بزرگ یونانی زمین را کروی می‌پنداشت، برای نخستین بار با استفاده از روش کاملاً بدیعی شعاع کرهٔ زمین را با تقریب خوبی به‌دست آورد.

در عصر زرین تمدن اسلامی نیز دانشمندان مسلمان با استفاده از روش‌های دیگری به محاسبهٔ شعاع زمین پرداختند که کار ابوریحان بیرونی در این زمینه از همه چشمگیرتر است.

بنابراین ابوالوفای بوزجانی که معاصر بیرونی بود و با وی مراودهٔ علمی داشت به‌خوبی از اندازهٔ شعاع کرهٔ زمین که با تقریب خوبی به‌دست آمده بود، آگاهی داشت. برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو شهر علاوه بر دانستن شعاع زمین باید مختصات جغرافیایی این شهرها را نیز بدانیم که عبارتند از:

عرض جغرافیایی

عرض جغرافیایی یک نقطه مانند X فاصلهٔ زاویه‌ای آن نقطه از دایرهٔ استوا است که از صفر تا نود درجه به طرف شمال و یا جنوب تغییر می‌کند. (شکل ۱) عرض جغرافیایی را با φ نمایش می‌دهند.



شکل (۱) ترسیم عرض جغرافیایی

طول جغرافیایی

طول جغرافیایی یک نقطه مانند X' کوتاه‌ترین فاصلهٔ زاویه‌ای آن نقطه از نصف‌النهار اصلی و یا نصف‌النهار مرجع است. این فاصله در جهت شرق به غرب از صفر تا صدوهشتاد درجه اندازه‌گیری می‌شود. (شکل ۱)

برای محاسبهٔ عرض جغرافیایی می‌توان از اندازهٔ ارتفاع خورشید در روز و یا ستارهٔ قطبی در شب استفاده کرد. زیرا در چرخش ظاهری آسمان از شرق به غرب، محل ستارهٔ قطبی ثابت است. از طرف دیگر ارتفاع ستارهٔ قطبی در محل نیز برابر با عرض جغرافیایی آن محل است.

بنابراین برای محاسبهٔ عرض جغرافیایی یک محل کافی است به وسیله آلات نجومی ارتفاع ستارهٔ قطبی را محاسبه کرد. امروزه منجمین برای این کار از «تئودولیت» بهره می‌جویند، در حالی که منجمین قدیم به‌ویژه منجمین اسلامی از آلت نجومی بنام

«ذات‌الشُّعبتین» استفاده می‌کردند. ابوریحان بیرونی در اثر معروف خود *تحدید نهایات الاماکن*، روش‌های دیگری را برای اندازه‌گیری عرض شهرها به کار برده است.

امّا تعیین طول جغرافیایی دشوارتر از یافتن عرض جغرافیایی بود؛ زیرا مشکل اصلی انتخاب نصف‌النهار مبدأ بود در حال حاضر طول جغرافیایی مکان‌ها را نسبت به نصف النهار گرینویچ (°۱۸۰ شرقی یا غربی) اندازه می‌گیرند؛ «امّا در گذشته برای طول جغرافیایی دو کرانه یا پایان در نظر می‌گرفتند. بیرونی در کتاب *تحد نهایات* ... می‌گوید که دو پایان یکی شرقی (برای مردم چین، هند و ایران) و دیگر غربی (برای مردم روم، یونان و مصر) در نظر گرفته‌اند. پایان غربی براساس دو موقعیت یعنی کرانهٔ دریای مغرب یا جزایر خالدات اندازه‌گیری می‌شد. اگر به طول جزایر خالدات مشرق °۱۸۰ می‌افزودند، حدود °۱۰ باقی می‌ماند تا به پایان شرقی برسد و اگر آغاز اندازه‌گیری از پایان شرقی شروع می‌شد و °۱۸۰ به‌طول آن در جهت مغرب می‌افزودند، به کرانهٔ دریا در مغرب می‌رسیدند که حدود °۱۰ تا جزایر خالدات فاصله بود. به همین جهت طول‌های شهرها اختلاف پیدا می‌کرد چنانکه برخی طول بغداد (نسبت به دریای مغرب) و برخی ۸۰ نسبت به جزایر خالدات می‌دانستند» (گیاهی نیروی، ۱۳۸۱: ۱۲۲–۱۲۱).

روش متداول در قدیم برای یافتن طول جغرافیایی استفاده از خسوف ماه بود. هرگاه دو ناظر در دو مکان مختلف زمان خسوف ماه را یادداشت نمایند، از اختلاف دو زمان می‌توان اختلاف طول جغرافیایی دو مکان مذکور به‌دست آورد. مثلاً بیرونی در کتاب *تحدید نهایات الاماکن*، خود نوشته است: «با ابوالوفا محمد بن محمد بوزجانی چنان قرار گذاشته بودم که او در بغداد و من در خوارزم خسوف ماه را رصد کنیم و این در سال ۳۸۷ ه. ق. صورت گرفت» (بیرونی، ۱۳۵۲ : ۲۱۸).

بنابراین مختصات شهرهای مکّه معظمه و بغداد که از زمان مأمون، خلیفه عباسی محاسبه شده بود برای ابوالوفا معلوم بوده است. این مختصات در رساله بوزجانی به شرح زیر است:

شهر	طول جغرافیایی = L	عرض جغرافیایی = φ
بغداد	۳۳ : ۲۵°	۷۰°
مکّهٔ معظّمه	۲۲°	۶۷°

جدول (۱) مختصات شهرهای مکه و بغداد در رسالهٔ بوزجانی

فرمول‌های مثلثاتی لازم برای تعیین فاصله شهری

ریاضیدانان اسلامی برای اولین بار با استفاده از کارهای هندیان توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس را تعریف کردند. آنان سینوس را جیب می‌نامیدند؛ آنان همچنین تابعی به نام جیب معکوس داشتند.

جیبِ معکوس (یا سینوس واژگونهٔ) زاویهٔ θ ـ که ما آن را با vers θ نشان می‌دهیم ـ تابع مثلثاتی است که اندازهٔ آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{vers}\,\theta = 1 - \cos\theta$$

ما در این مقاله برای نشان دادن متمم زاویهٔ θ، از علامت $\bar{\theta}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$\bar{\theta} = 90^\circ - \theta$$

فرمول‌های مثلثاتی که در رساله بوزجانی به‌کار رفته است عبارتند از:

فرمول سینوس‌ها

می‌دانیم که در هر مثلث کرویِ ABC به اضلاع a، b و c، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

این فرمول مثلثاتی را ریاضیدانان اسلامی «شکل مُغنی» می‌نامیدند و ابوالوفا یکی از کسانی است که آن را برای اولین بار کشف کرد. ابونصر عراق نیز جداگانه آن را کشف کرده بود.

فرمول کسینوس‌ها

در هر مثلث کروی ABC به اضلاع a و b و c رابطه زیر برقرار است:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \sin A$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \sin B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \sin C$$

اثبات این فرمول‌ها در اغلب کتاب‌های درسی مثلثات کروی موجود است. با استفاده از این فرمول‌ها به آسانی می‌توان فرمول سینوس‌ها را نیز در همین مثلث کروی به‌دست آورد.

هرگاه یکی از زوایای مثلث کروی مثلاً C قائمه باشد، فرمول‌های بالا شکل ساده تری به خود می‌گیرند. یکی از این فرمول‌ها را ما برای سهولت به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\text{Cos } c = \text{Cos}b.\text{Cos}a$$

این همان قضیهٔ فیثاغورث در مثلث کروی است.

بررسی روش‌های بوزجانی برای تعیین فاصلهٔ بغداد تا مکّهٔ معظمه

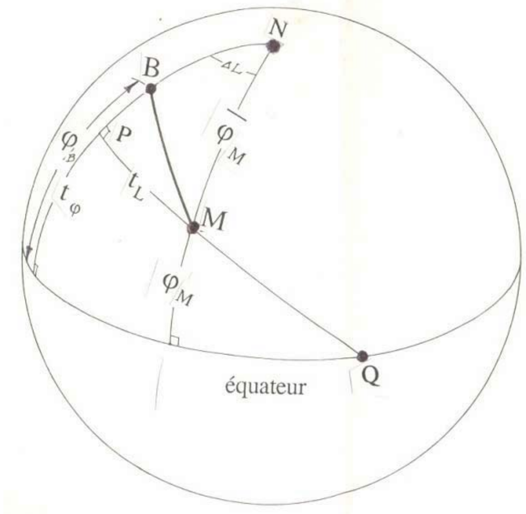
روش اوّل بوزجانی

مطابق تعریف فاصلهٔ دو مکان روی کرهٔ زمین، مساوی با کمانی از دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ زمین است که از این دو مکان می‌گذرد.

هرگاه مکان مکّهٔ معظّمه و بغداد را به‌ترتیب با حرف‌های M و B نمایش دهیم ـ با

توجه به تعریف فوق ـ می‌توانیم شکل زیر را رسم کنیم.

چنان که در این شکل ملاحظه می‌شود، M در طرف شرق Bقـرار دارد. در حـالی که در حقیقت چنین نیست و این B است که در قسـمت شـرقیِ M واقـع اسـت. امـا چنین فرضی هیچ‌گونه تأثیری روی محاسبات نمی‌گذارد. در این شکل، N قطب شمال و Q قطب دایرهٔ معدّل‌النّهارِ BN است.



شکل (۲) محاسبهٔ فاصلهٔ مکه و بغداد روی کرهٔ زمین

فرمول سینوس‌ها را برای مثلث کروی PMN می‌نویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sin \hat{N}}{\sin PM} = \frac{\sin \frac{\pi}{۲}}{\sin MN}$$

یا

$$\frac{\sin \Delta \mathrm{L}}{\sin \mathrm{t_L}}=\frac{\sin \frac{\pi}{۲}}{\sin \overline{\varphi}_M},(\overline{\varphi}=۹۰^\circ-\varphi)$$

$$\sin \mathrm{t_L}=\sin\Delta\mathrm{L}\times\sin\overline{\varphi}_\mathrm{M}=\sin\Delta\mathrm{L}\times\cos\varphi_\mathrm{L}$$

$$\sin \mathrm{t_L}=\sin(۷۰^\circ-۶۷^\circ)\times\cos ۲۲^\circ=\sin ۳^\circ\times\cos ۲۲^\circ$$

ریاضیدانان اسلامی جداول مثلثاتی سینوس و کسینوس را در اختیار داشتند که با استفاده از آن می‌توانستند سینوس و یا کسینوس زاویهٔ معلومی را پیدا کنند. جداول مثلثاتی ابوالوفا به‌دست ما نرسیده، ولی بیرونی که معاصر ابوالوفا است در کتاب *قانون مسعودی* خود این جداول را آورده است. از این‌رو می‌بینیم که ابوالوفا در رسالهٔ خود بدون محاسبه، مقادیر $\sin ۳^\circ$ و $\cos ۲۲^\circ$ را به‌صورت زیر آورده است:

$\sin ۳^\circ$ = ۳ ، ۸ ،۴۳

$\cos ۲۲^\circ$ = ۵۵ ،۳۷ ،۵۱ ،۴۳

در اینجا اشاره به این نکته ضروری است که مقادیر فوق در دستگاه شصت‌گانه نوشته شده‌اند. یعنی آن‌ها را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

۳ ، ۸ ،۴۳ = $۳(۶۰)^۲ + ۸(۶۰)^۱ + ۴۳(۶۰)^۰$

۵۵ ،۳۷ ،۵۱ ،۴۳ = $۵۵(۶۰)^۳ + ۳۷(۶۰)^۲ + ۵۱(۶۰)^۱ + ۴۳(۶۰)^۰$

ضرب این اعداد در یکدیگر کاری نسبتاً خسته کننده است.

ابوالوفا در رساله‌اش تنها حاصل این ضرب را به‌صورت زیر آورده است:

$\sin\varphi_L$ = ۳ ، ۸ ،۴۳ × ۵۵ ،۳۷ ،۵۱ ،۴۳ = ۲ ،۵۴ ،۴۱ ،۳۳ ،۱۳ ،۴۳

(آخرین رقمِ $\sin ۳^\circ$ باید ۳۴ باشد، نه ۴۳. نیز رقم انتهاییِ $\cos ۲۲^\circ$، به جای ۴۳ باید ۴۴ باشد.)

$$\boxed{\mathrm{t_L} = ۲ ; ۴۶ , ۵۲ , ۵۶^\circ}$$

بنابراین:

(دو رقمِ آخر عددِ بالا به ترتیب باید ۵ و ۵۳ باشد.)
امّا در مثلث قائم‌الزاویه MPN بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$\cos MN = \cos PM \times \cos PN$$

امّا

$$\cos MN = \cos(۹۰ - \varphi_M) = \sin \varphi_M$$

$$\cos PN = \cos(۹۰ - t_\varphi) = \sin t_\varphi$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos PN \Rightarrow \sin\varphi_M = \cos t_L \times \sin t_\varphi \times \cos MN = \cos PM$$

$$\sin t_\varphi = \frac{\cos\varphi_M}{\sin t_L}$$

$$\sin t_\varphi = \frac{\sin ۲۲^\circ}{\cos ۲;۴۶,۵۲,۵۶^\circ} = \frac{۲۲,۲۸,۳۵,۲}{۵۹,۵۵,۴۹,۱۹}$$

$$۲۲ ، ۳۰ ، ۱۰ ، ۱۳ \sin t_\varphi =$$

$$۱ ، ۳۸ ، ۲۸\mathring{;} ۲۲ \ t_\varphi =$$

(آخرین رقمِ $\sin ۲۲^\circ$ ، در حقیقت ۱ است نه ۲، و دو رقم آخری $\cos t\ t_L$ نیز به‌جـای ۱۹ و ۴۹ به‌ترتیب باید ۳۳ و ۴۵ باشد. هم‌چنین آخرین رقمِ t_φ در واقع ۳ است.)

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث در همان مثلث قائم‌الزاویهٔ MPN ، رابطه‌هـای زیـر را نیز می‌توان نوشت:

$$\cos BM = \cos MP \times \cos PB$$

$$\cos BM = \cos(\varphi - t_\varphi) \times \cos t_L$$

$$= \text{Cos } (۳۳ ، ۲۵^\circ - ۲۲ ، ۱ ، ۳۸ ، ۲۸^\circ) \times \text{Cos } ۲ ، ۴۶ ، ۵۲ ، ۵۶^\circ$$

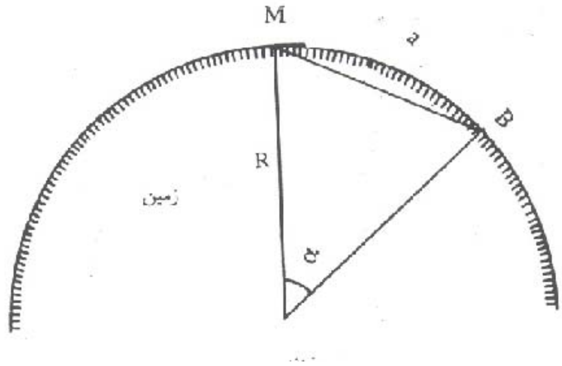
$$= ۵۸ ، ۴۴ ، ۵۶ ، ۲۱ ، ۴۶ ، ۵۴ ، ۲۴ ، ۱۹$$

(آخرین ارقام $\text{Cos } t_L$ و $\cos(\varphi_B - t_\varphi)$ بایستی به‌ترتیب ۳۳ و ۳۲ باشد).

بنابراین طول کمان BM بر حسب درجه برابر است با:

$$\boxed{BM = ۱۱\,,\,۴۳\,\,,\,۱۳\,,\,۸^{\circ}}$$

محاسبهٔ بوزجانی به‌همین جا ختم می‌شود؛ در صورتی که برای شناخت دقیق فاصلهٔ بغداد تا مکّهٔ معظّمه، باید عملیات را چنین ادامه دهیم:



شکل (۳) محاسبهٔ دقیق فاصلهٔ بغداد تا مکه

در هر مثلث کروی، اندازهٔ یک ضلع ـ مثلاً a در شکل ۳ ـ مساوی اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است ـ یعنی: $\alpha = B\hat{O}M$ ـ هرگاه زاویهٔ α برحسب درجه و شعاع دایره (یا در این‌جا شعاع کره) R فرض شود، همواره می‌توان نوشت:

$a/۲R\pi = \alpha/۳۶۰^{\circ}$

با استفاده از روش محاسباتی خود، ابوالوفا برای اندازهٔ کمان BM بر حسب درجه، مقدار زیر را به‌دست آورد:

$$\boxed{BM = ۱۱\,,\,۴۳\,\,,\,۱۳\,,\,۸^{\circ}}$$

که برای سهولت در محاسبات بعدی می‌توان مقدار تقریبیِ فاصلهٔ زاویه‌ایِ مکّهٔ معظّمه تا مدینه را ۱۲ درجه اختیار کرد. یعنی: $BM \approx ۱۲^\circ$

و هنگامی که اندازهٔ کمان a معلوم باشد با دانستنِ R ـ شعاع کرهٔ زمین که تقریباً برابر با ۶۳۸۰ کیلومتر است ـ می‌توانیم مسافتِ BM را برحسب کیلومتر به‌دست آوریم. پس:

$$BM = \frac{۱۲}{۳۶۰} \times ۲\pi r = \frac{۱۲}{۳۶۰} \times ۴۰۰۸۶ = ۱۳۳۶\,\mathrm{Km}$$

روش دوم بوزجانی برای محاسبهٔ فاصلهٔ بغداد تا مکّهٔ معظّمه

در هر مثلث کرویِ ABC به اضلاع b , a و c داریم:

$$\cos B \times \ \sin c \times \cos c + \sin a \times \cos b = \cos a$$

با استفاده از این رابطه، در مثلث کروی BMN (از شکل ۲) خواهیم داشت:

$$\cos B\widehat{M} = \cos B\widehat{N} \times \cos M\widehat{N} + \cos M\widehat{N}$$
$$+ \sin B\widehat{N} \times \sin M\widehat{N} \times \cos\Delta L$$
$$= \cos\varphi_{\mathrm{B}} \times \cos\varphi_{\mathrm{M}} \times \cos\Delta L \times + \sin\varphi_{\mathrm{B}} \times \sin\varphi_{\mathrm{M}}$$

به‌طرف راست این رابطه مقدارِ $\cos \varphi_{\mathrm{B}} \times \cos \varphi_{\mathrm{M}}$ را یک بار اضافه و بار دیگر کم می‌کنیم. بنابراین:

$$\cos B\widehat{M} = \cos\varphi_{\mathrm{B}} \times \cos\varphi_{\mathrm{M}} \times \cos \Delta L$$
$$+ \sin\varphi_{\mathrm{B}} \times \sin\varphi_{\mathrm{M}} \pm \cos\varphi_{\mathrm{B}} \times \cos\varphi_{\mathrm{M}}$$

و با ساده کردن طرف راست خواهیم داشت:

$$\cos B\widehat{M} = \cos B\widehat{N} \times \cos M\widehat{N} + \cos M\widehat{N} + \sin B\widehat{N} \times \sin M\widehat{N} \times \cos\Delta L$$
$$= \cos(\varphi_{\mathrm{B}} - \varphi_{\mathrm{M}}) - (۱ - \cos\Delta L) \times \cos\varphi_{\mathrm{B}} \times \cos\varphi_{\mathrm{M}}$$

اما با توجه به توضیحی که درباره سینوس معکوس دادیم می‌توان نوشت:

$$(۱-\cos\Delta L)=\mathrm{v}ers\Delta L$$

بنابراین:

$$\cos B\widehat{M}=\cos(\varphi_{\mathrm{B}}-\varphi_{\mathrm{M}})-vers\Delta L\times\cos\varphi_{B}\times\cos\varphi_{M}$$

$$\cos B\widehat{M}=\cos\Delta\varphi-\frac{vers\Delta L\times\cos\varphi_{B}\times\cos\varphi_{M}}{۱}$$

$$\times\frac{\cos\Delta\varphi}{\cos\Delta\varphi}-\cos\Delta\varphi-\frac{vers\Delta L\times\cos\varphi_{B}\times\cos\varphi_{M}\times\cos\Delta\varphi}{\cos(\varphi_{B}-\varphi_{M})}$$

$$=\cos\Delta\varphi-\frac{vers\Delta L\times\cos\Delta\varphi\times\cos\Delta\varphi}{۱+\mathrm{tg}\varphi_{\mathrm{B}}\times\mathrm{tg}\varphi_{M}}$$

حال فرض می‌کنیم که:

$$۱+tg\varphi_{B}\times tg\varphi_{M}=M'$$

و:

$$\frac{vers\Delta L\times\cos\Delta\varphi}{M'}=\mathrm{P}$$

بنابراین با استفاده از روابط اخیر می‌توان نوشت:

$$\cos B\widehat{M}=\cos\Delta\varphi-P$$

از طرفی، بنابر رابطهٔ (۱) داریم:

$$\mathrm{M}'=\mathrm{tg}\ ۳۳,۲۵^{\circ}\times\mathrm{tg}\ ۲۲^{\circ}+۱$$

و یا:

$$\mathrm{M}'=(۳۹,۳۵,۱۵,۵۵,۳۵,۴۶\times ۲۴,۱۴,۲۹,۴۰)+۶۰,۰,۰,\ldots-۱۵,۵۹\ ,۴۰,۱۰,۲۴+۶۰,۰,۰,۰,۰$$

$$=۷۵,۵۹\ ,۴۰,۱۰,۲۴$$

(که در این محاسبات آخرین رقم $\mathrm{tg}\ ۳۳\ ;\ ۲۵^{\circ}$ در حقیقت ۱۰ و ۳۱ است.)

اما مقدار P نیز با استفاده از رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P=\frac{\text{vers}\,۳^{\circ}\times\cos(۳۳,۲۵^{\circ}-۲۲^{\circ})}{M'}=\frac{\text{vers}\,۳^{\circ}\times\cos ۱۱,۲۵^{\circ}}{M'}$$

$$P=\frac{۰,۴,۴۶,۱,۵۸,۴۸,۴۵,۴۲}{۷۵,۵۹,۴۰,۱۰,۲۴}=\frac{۴,۵۰,۹,۳۲,۱۵,۵۷,۴۲}{۷۵,۵۹,۴۰,۱۰,۲۴}$$

$$=۰,۳,۴۹,۵,۲۲$$

که دو رقم آخرِ $\cos ۱۱ ، ۲۵^{\circ}$ ، بایستی ۹ و ۴۹ باشد.)

$$\cos BM=\cos ۱۱,۲۵^{\circ}-P=۵۸,۴۸,۴۵,۴۲\ -۰,۳,۴۹,۵,۲۱,\ldots$$

$$=۵۸,۴۴,۵۶,۳۶$$

بنابراین:

$$\boxed{BM=۱۱,۴۳\ ,۱۱,۴۸^{\circ}}$$

و به این ترتیب، روش دوم بوزجانی نیز پایان می‌یابد.

مقایسهٔ دستاورد ابوالوفا با یکی از دستاوردهای امروزی

روش فتوگرامتری، همان روش نقشه‌کشی از روی عکس‌برداری هوایی است. این روش شکل پیشرفته و امروزی مساحی می‌باشد. هر عکس تهیه شده بوسیله این روش که ما از این پس آن را «نقشهٔ جغرافیایی» می‌نامیم مقیاسی دارد و نقاط زمینی که از طریق عکس‌های ماهواره‌ای به‌دست آمده‌اند به‌صورت موزائیک یعنی تقسیم‌بندی میلی متری و شطرنجی در نقشه قرار داده و شماره‌گذاری شده‌اند.

بدیهی است ابزارها و دستگاه‌های متعددی در فن‌آوری فتوگرامتری به‌کار می‌روند و هر یک از این دستگاه‌ها هر روز در حال تکامل‌اند. نقشه، تصویر قائم زمین نسبت به یک سطح مبنا در یک مقیاس مشخص بر روی کاغذ است. بنابراین با توجه به روش های فتوگرامتری در تهیه نقشه، ما می‌توانیم از روی مقیاس هر نقشه فاصلهٔ دو نقطه از زمین مثلاً فاصله بین بغداد و مکه را محاسبه کنیم.

برای این منظور نقشه‌ای از خاورمیانه را در نظر می‌گیریم کـه مقیـاس آن $\frac{۱}{۱۶۰۰۰۰۰۰}$ است.

در این نقشه فاصلهٔ بغداد ـ مکه را با یک خط‌کش معمولی انـدازه‌گیـری مـی‌کنـیم عدد ۸/۵ سانتی‌متر به‌دست می‌آید. در این صورت فاصلهٔ حقیقی بغـداد ـ مکـه چنـین خواهد بود:

$$۸/۵ \times ۱۶۰۰۰۰۰۰ = ۱۳۶۰۰۰۰۰۰ \text{ cm}$$

$$۱۳۶۰۰۰۰۰۰ \div ۱۰۰۰۰۰ = ۱۳۶۰ \text{ km}$$

این عدد با عدد حاصل از روش بوزجانی یعنی km ۱۳۳۶ تنها ۲۴ کیلـومتر اخـتلاف دارد. بنابراین روش بوزجانی روشی نسبتاً دقیق است و با مقدار به‌دست آمدهٔ امروزه اخـتلاف بسـیار کمی دارد. علت این اختلاف هم شاید آن باشد که در علم ژئودزی کره زمین را ژئوئید فـرض می‌کنند حال آنکه بوزجانی آن را کروی فرض کرده بود. در واقع براساس نظریهٔ نیـوتن، زمـین همانند یک تودهٔ سیال یکنواختی است «که این تودهٔ سیال، در اثر چرخش حول یک محور باید به شکل یک بیضوی دوار کامل درآید؛ در حالی که شکل واقعی زمین به علت وجود قـاره‌هـا، اقیانوس‌ها، کوهستان‌ها، دشت‌ها و جزایر آتشفشانی و غیره به شکل بیضوی دوار کامل هندسی نیست. در علم ژئودزی چنین سطحی را ژئوئید می‌نامند» (نوری ۱۳۶۴ : ۳).

نتیجه‌گیری

در تمدن اسلامی، که بر خدامحوری بنیان گردیده بود نه تنها تضادی بین علـم و دیـن مشاهده نمی‌شد، بلکه بلعکس تعامل خاصی بین این دو وجود داشت.

همین امر موجبِ گسترش علوم عقلی و به‌ویژه ریاضیات و نجوم در قـرن چهـارم هجری شد. ریاضیدانان و منجمان برجسته این دوره عـلاوه بـر نشـر و توسـعه علـوم مذکور کوشیدند تا آن‌ها را در تسهیل زندگی روزمره به کار گیرند کـه یـک نمونـهٔ آن

تعیین فاصلهٔ مکهٔ معظمه تا بغداد بود که به‌وسیله ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت.

این دانشمند با استفاده از مختصات جغرافیایی شهرهای مذکور و فرمول‌های ریاضی در مثلثات کروی، فاصله بغداد ـ مکه را محاسبه کرد و به عددی رسید که با عددی که مهندسین امروزی با وسایل پیشرفته خود بدان رسیده‌اند اندک اختلافی دارد.

پی‌نوشت

۱. محمد ارغون، نویسنده الجزایری مقیم فرانسه درباره سیاست تسامح آل‌بویه چنین نوشته است: «یکی از ویژگی‌های بارز دوره آل‌بویه این بود که هیچکدام از گرایش‌هایی که از صدر اسلام در یک رقابت سرسختانه گسترش یافته بودند، بر دیگری چیره نشدند. بلکه برعکس همه این گرایش‌ها به برکت هم‌زیستی مسالمت‌آمیزی که نتیجهٔ ثبات سیاسی و آزادی اندیشه این دوره است، کمال پویایی و شکوفایی خود را یافتند». (Arkoum, 1982: 189)

منابع

بیرونی، ابوریحان (۱۳۵۲). *کتاب تحدید نهایات الاماکن تصحیح مسافات المساکن*. ترجمهٔ احمد آرام، تهران: بی‌نا.
کرجی، ابوبکر (۱۳۴۵). *استخراج آبهای پنهانی*، ترجمه فارسی کتاب *انباط المیاه الخفیه* توسط حسین خدیوجم، تهران: انتشارات بنیاد فرهنگ ایران.
گیاهی یزدی، حمیدرضا (۱۳۸۱). «تحلیل رصد مشترک ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی در ماه گرفتگی سال ۳۸۷ه.ق.» در *نابغهٔ بوزجان*، به اهتمام محسن حیدرنیا. تهران: بی‌نا.
نوری، علی (۱۳۶۴). *ژئودزی*، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

Arkoun, M. (1982). *Miskawayh Philosophe et Historien*, Paris, p. 189.
Ben Yakhlef T. (1994). *Abu Sulayman al-Mantiqi*, Memoire de Maitrise, Universite, de Parsi I Sorbone.
Kennedy, E. S. (1984). "Abul-wafa calculates the distance Bagdad – Mecca". *Historia Mathematica*. pp. 193-206.
Kramer, J. (1993). *Humanism in the Renaissance of Islam: The Cultural Revival During the Age*, Leiden.
Mez, A. (1922), *Die Renaissance des Islam*, Heidelberg
Zimmermamn, F. (1976). "The dasture al-munajjimine of Ms. Paris B.M. Ar. 5968" in *Proceeding of the first intnternational symposium for history of Arabic science*. University of Aleppo 2, 184-192, 5-12 April, 1976.